数理解析研究所講究録
第 783 巻 1992 年 1-11

Multifractal Measures and Martingales

岡田 達也 (Tatsuya Okada)
福島県立医大

関口 健 (Takeshi Sekiguchi)
東北学院大·教養

塩田 安信 (Yasunobu Shiota)
秋田大学·教育

1 Multifractal とは

この節では Falconer の本 [2] に従って Multifractal に関する基礎的なことを簡単に説明する. 詳しいことは [2] あるいは Feder [3] を参照せよ.

1.1 $f(\alpha)$ と $\tau(q)$ の定義

μ をサポートが有界な $\mathbf{R}^d$ 上の p.m. とし, $\{B_i\}$ で $\mathbf{R}^d$ の δ-mesh cubes を表す. このとき

$$N_\delta(\alpha) = \sharp\{i : \mu(B_i) \geq \delta^\alpha\}, \quad -\infty < \alpha < \infty \tag{1}$$

$$S_\delta(q) = \sum_{\mu(B_i)>0} \mu(B_i)^q, \quad -\infty < q < \infty \tag{2}$$

とおく. $N_\delta(\alpha)$ が α の単調増加関数となり, $S_\delta(q)$ が q の単調減少関数となることは容易にわかるであろう. 次に

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\log\{N_\delta(\alpha+\varepsilon) - N_\delta(\alpha-\varepsilon)\}}{-\log\delta}, \quad 0 \leq \alpha < \infty \tag{3}$$

$$\tau(q) = \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\log S_\delta(q)}{-\log\delta} \tag{4}$$

と定義する. ただし,(3) では $\log 0 = -\infty$ とする. $f(\alpha)$ のことを multifractal spectrum, $\tau(q)$ のことを mass exponent という.
上の定義において $\delta \downarrow 0$ の代わりに $\delta_{k+1}/\delta_k >^\exists C > 0$ を満たす $\delta_k \downarrow 0$ を考えれば十分であることに注意する.

1.2 $f(\alpha)$ と $\tau(q)$ の関係

十分小さい ε に対して

$$\begin{aligned} N_\delta(\alpha+\varepsilon) - N_\delta(\alpha-\varepsilon) &= \sharp\{i:\ \delta^{\alpha+\varepsilon} \le \mu(B_i) < \delta^{\alpha-\varepsilon}\} \\ &\sim \sharp\{i:\ \mu(B_i) \simeq \delta^{\alpha}\} \end{aligned}$$

であり, 十分小さい δ に対しては

$$N_\delta(\alpha+\varepsilon) - N_\delta(\alpha-\varepsilon) \sim \delta^{-f(\alpha)}$$

となるから

$$\begin{aligned} S_\delta(q) &= \sum_{\mu(B_i)>0} \mu(B_i)^q \\ &\sim \int_0^\infty (\delta^\alpha)^q \cdot \delta^{-f(\alpha)} d\alpha \\ &\sim \int_0^\infty \delta^{-(f(\alpha)-q\alpha)} d\alpha \\ &\sim \delta^{-\sup_{0\le\alpha<\infty}\{f(\alpha)-q\alpha\}} \quad (\delta \downarrow 0) \end{aligned}$$

即ち

$$\tau(q) = \sup_{0\le\alpha<\infty} \{f(\alpha) - q\alpha\}, \quad -\infty < q < \infty \tag{5}$$

の成り立つことが予想される. もちろんこの議論は厳密ではないからつねに (5) が成り立つとはいえないが, 次の結果が得られている.

定理 1.1 ([2]) $f(\alpha)$ が存在すれば $\tau(q)$ も存在して (5) が成り立つ.

[2] には $q > 0$ のときだけ証明してある. $q < 0$ のときにも同様の方法で示せるとあるが, $^\exists q' < q:\ \tau(q') < \infty$ という条件が必要と思われる (次節参照).

1.3 Legendre 変換

以下 f が存在して (5) 式が成り立っているとし, さらに f は α について微分可能で, strictly convex であるとしよう. このとき各 q に対して (5) 式を attain する α を $\alpha(q)$ で表すと

$$\tau(q) = f(\alpha(q)) - q\alpha(q) \tag{6}$$

が成り立つ. ここでもし α が q で微分可能ならば

$$\frac{d}{dq}\tau(q) = \frac{d}{d\alpha} f(\alpha(q)) \frac{d}{dq}\alpha(q) - q\frac{d}{dq}\alpha(q) - \alpha(q) \tag{7}$$

となる. 一方, $\alpha(q)$ が

$$\frac{d}{d\alpha}(f(\alpha) - q\alpha) = 0$$

の解となることより

$$q = \frac{d}{d\alpha} f(\alpha(q)) \tag{8}$$

だから, これを (7) に代入して

$$\frac{d}{dq}\tau(q) = -\alpha(q) \tag{9}$$

が得られる.(6), (9) は,Legendre 変換と呼ばれているものである.

μ が具体的に与えられている場合は,Legendre 変換を用いて次の手順で $f(\alpha)$ のグラフを描ける場合が多い.

1. $\tau(q)$ を求める
2. (9) 式を用いて $\alpha(q)$ を求める
3. (6) 式を用いて $f(\alpha(q))$ を求める
4. パラメーター q を動かして $(\alpha(q), f(\alpha(q)))$ のグラフを描く

なお (8) より $f(\alpha)$ のグラフは $\alpha = \alpha(q)$ で傾き q をもつことに注意しておく.

1.4 Box-counting 次元と情報量次元

特に $q = 0,\ 1$ のとき $f(\alpha(q))$ がどのような量となるのか考える.

1) $q = 0$ のとき.

$$f(\alpha(0)) = \tau(0) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\sum_{\mu(B_n)>0} 1}{-\log \delta}$$

ここで最終項は $\mathrm{supp}(\mu)$ の box-counting 次元 $\dim_B \mathrm{supp}(\mu)$ を表す. f は $\alpha = \alpha(0)$ で傾き 0 となるから, f が $\alpha = \alpha(0)$ で最大値 $\dim_B \mathrm{supp}(\mu)$ を取ることもわかる.

2) $q = 1$ のとき. このとき $S_\delta(1) = 1$ より $\tau(1) = 0$ だから

$$f(\alpha(1)) = \alpha(1) = -\frac{d\tau}{dq}(1) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\sum_{\mu(B_n)>0} \mu(B_i) \log \mu(B_i)}{\log \delta}$$

ここで最終項は μ の情報量次元 $\dim_I \mu$ を表す．また f の $\alpha = \alpha(1)$ での傾きは 1 となる．さらに，任意の $h > 0$ に対して，$\delta \to 0$ のとき

$$\mu\left\{\cup B_i : \ \delta^{\alpha(1)+h} < \mu(B_i) < \delta^{\alpha(1)-h}\right\} \longrightarrow 1$$

が成り立つ．これは $\mu(B_i)$ の値が $\delta^{\alpha(1)}$ に近い $\delta^{-\alpha(1)}$ 個の δ-mesh cubes の上に μ が集中していると解釈される．

1.5 3 進 Cantor 集合をサポートにもつ p.m. の例

$0 < p < 1$，とする．$I = I_{0,0} = [0,1]$ とおき，$n = 1,2,3,\ldots$ に対して

$$\begin{aligned} I_{n,j} &= [\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n}), \quad j = 0,1,\ldots,3^n-2 \\ I_{n,3^n-1} &= [\frac{3^n-1}{3^n}, 1] \end{aligned}$$

とおく．このとき I 上の p.m. μ で

$$\begin{aligned} \mu(I_{n+1,3j}) &= p\mu(I_{n,j}), \\ \mu(I_{n+1,3j+1}) &= 0, \\ \mu(I_{n+1,3j+2}) &= (1-p)\mu(I_{n,j}), \end{aligned}$$

$n = 0,1,2,\ldots,\ \ j = 0,1,\ldots,3^n-1$，を満たすものが一意に決まる．$\mu$ はサポートとして 3 進 Cantor 集合をもつ p.m. である．この μ に対して $f(\alpha)$ の存在を仮定して，上に述べた方法で $f(\alpha)$ を求めてみよう．$\delta = 3^{-k}$ のときを考えることにより

$$\tau(q) = \frac{\log(p^q + (1-p)^q)}{\log 3} \tag{10}$$

がわかる．(9) より

$$\alpha(q) = -\frac{p^q \log p + (1-p)^q \log(1-p)}{(p^q + (1-p)^q)\log 3} \tag{11}$$

が得られ，(6) を用いると

$$f(\alpha(q)) = \frac{\log(p^q + (1-p)^q) - \frac{q(p^q \log p + (1-p)^q \log(1-p))}{p^q + (1-p)^q}}{\log 3} \tag{12}$$

が得られる．(10),(11),(12) より

$$\begin{aligned} \dim_B \mathrm{supp}(\mu) = \tau(0) = \frac{\log 2}{\log 3}, \\ \dim_I \mu = \alpha(1) = -\frac{p \log p + (1-p)\log(1-p)}{\log 3}, \end{aligned}$$

$$\lim_{q\to\infty}\alpha(q) = -\frac{\log p\wedge(1-p)}{\log 3},\quad \lim_{q\to-\infty}\alpha(q) = -\frac{\log p\vee(1-p)}{\log 3},$$
$$\lim_{q\to\infty} f(\alpha(q)) = 0,\quad \lim_{q\to-\infty} f(\alpha(q)) = 0$$

の成り立つこともすぐわかる.

この方法では $f(\alpha)$ の存在を示すことがキーポイントとなる. [2] では large deviation の理論における Chernoff の定理を用いて存在を示している.

定理 1.2 (Chernoff の定理の a variant cf.[1],[2]) $X_1, X_2, \cdots$ が i.i.d. で

$$E[\log X_1] < \log\gamma,\quad P[X_1 > \gamma] > 0$$

を満たすならば

$$\lim_{n\to\infty} P[X_1X_2\cdots X_n \geq \gamma^n]^{1/n} = \sup_{0\leq q<\infty} E[X_1^q]\gamma^{-q}$$

が成り立つ.

この結果を $P[X_1 = p] = P[X_1 = 1-p] = 1/2$ なる i.i.d. $X_1, X_2, \cdots$ に適用することにより, $f(\alpha)$ の存在が導ける.

2 Martingale による定式化

この節では前節で述べた multifractal の理論を martingale の概念を用いて書き直す.

2.1 定義

$I = [0,1]^d$とし, 整数 $r(\geq 2)$ に対して

$$I_{n,j_1,\cdots,j_d} = \prod_{k=1}^{d}[\frac{j_k}{r^n}, \frac{j_{k+1}}{r^n})$$

$$F_n = \sigma\{I_{n,j_1,\cdots,j_d} :\ j_1,\cdots,j_d = 0,\cdots,r^n-1\}$$

($n = 0,1,2,\cdots,\ j_1,\cdots,j_d = 0,\cdots,r^n-1$) とおく. P を I 上の Lebesgue 測度, μ を I 上の p.m. とし, P に関する期待値を E[·] で表す.

$$Z_n = \sum_{j_1,\cdots,j_d=0}^{r^n-1} \frac{\mu(I_{n,j_1,\cdots,j_d})}{\mathrm{P}(I_{n,j_1,\cdots,j_d})} 1_{I_{n,j_1,\cdots,j_d}},\quad n = 0,1,2,\cdots$$

と定める.

命題 2.1

1) (Z_n, F_n) は P に関する martingale となる.

2) $\mathrm{E}[Z_n] = 1,\ n = 0, 1, 2, \cdots$

3) $0 \le Z_n \le r^{nd}$

この (Z_n, F_n) を用いて multifractal の理論に現れる諸量を定義し直そう. $-\infty < \alpha < \infty$, $-\infty < q < \infty$ に対して

$$
\begin{aligned}
N_{r^{-n}}(\alpha) &= r^{nd}\mathrm{P}[Z_n \ge r^{n(d-\alpha)}] \\
&= \sharp\{I_{n,j_1,\cdots,j_d} :\ \mu(I_{n,j_1,\cdots,j_d}) \ge (r^{-n})^{\alpha}\}, \\
S_{r^{-n}}(q) &= r^{nd(1-q)}\mathrm{E}[Z_n^q :\ Z_n > 0] \\
&= \sum_{\mu(I_{n,j_1,\cdots,j_d})>0} \mu(I_{n,j_1,\cdots,j_d})^q, \\
\overline{f}(\alpha) &= \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} \frac{\log\{N_{r^{-n}}(\alpha+\varepsilon) - N_{r^{-n}}(\alpha-\varepsilon)\}}{-\log r^{-n}} \\
&= d + \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{P}[r^{n(d-\alpha+\varepsilon)} > Z_n \ge r^{n(d-\alpha-\varepsilon)}]}{n\log r} \\
&= d + \overline{f}_0(\alpha), \\
\underline{f}(\alpha) &= \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty} \frac{\log\{N_{r^{-n}}(\alpha+\varepsilon) - N_{r^{-n}}(\alpha-\varepsilon)\}}{-\log r^{-n}} \\
&= d + \liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{P}[r^{n(d-\alpha+\varepsilon)} > Z_n \ge r^{n(d-\alpha-\varepsilon)}]}{n\log r} \\
&= d + \underline{f}_0(\alpha), \\
\overline{\tau}(q) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log S_{r^{-n}}(q)}{-\log r^{-n}} \\
&= d(1-q) + \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{E}[Z_n^q : Z_n > 0]}{n\log r} \\
&= d(1-q) + \overline{\tau}_0(q), \\
\underline{\tau}(q) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{\log S_{r^{-n}}(q)}{-\log r^{-n}} \\
&= d(1-q) + \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{E}[Z_n^q : Z_n > 0]}{n\log r} \\
&= d(1-q) + \underline{\tau}_0(q)
\end{aligned}
$$

とおく. $\overline{f}(\alpha) = \underline{f}(\alpha)$, $\overline{\tau}(q) = \underline{\tau}(q)$ のとき各々共通の値を $f(\alpha)$, $\tau(q)$ で表す.

2.2 基本的な結果

命題 2.2

1) $-\infty \le \underline{f}(\alpha) \le \overline{f}(\alpha) \le d$, $\underline{f}(\alpha) \neq -\infty$ ならば $\underline{f}(\alpha) \ge 0$, $\overline{f} \not\equiv 0$
2) $\tau(1) = 0$, $\underline{\tau}(0) \ge 0$, $\overline{\tau}(q) \le d$ $(q \ge 0)$ で, 特に $\overline{\tau}(q) \le d(1-q)$ $(0 \le q \le 1)$

命題 2.3 $-\infty < q < \infty$ に対して

$$\overline{\tau}(q) \ge \sup_{0 \le \alpha < \infty} (\overline{f}(\alpha) - q\alpha),$$

$$\underline{\tau}(q) \ge \sup_{0 \le \alpha < \infty} (\underline{f}(\alpha) - q\alpha)$$

命題 2.4 ${}^{\exists}q' < q$: $\tau(q') < \infty$ ならば

$$\overline{\tau}(q) \le \sup_{0 \le \alpha < \infty} (\overline{f}(\alpha) - q\alpha)$$

$q > 0$ のときこの条件は自然に満たされる.

定理 2.1 ${}^{\exists}f$, ${}^{\exists}q'$: $\overline{\tau}(q') < \infty$ ならば ${}^{\forall}q > q'$ に対して

$${}^{\exists}\tau(q) = \sup_{0 \le \alpha < \infty} (f(\alpha) - q\alpha)$$

$\overline{\tau}(0) < \infty$ だから $q > 0$ のときはつねに成り立つ.

定理 2.2 ${}^{\exists}f$ strictly concave, continuous on $\{f > -\infty\}$, ${}^{\exists}q'$: $\overline{\tau}(q') < \infty$ ならば ${}^{\forall}q > q'$, ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}[Z_n^q : Z_n > 0] - \mathrm{E}[Z_n^q : r^{n(d-\alpha(q)+\varepsilon)} > Z_n \ge r^{n(d-\alpha(q)-\varepsilon)}]}{r^{n\tau_0(q)}} = 0$$

特に $q = 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[Z_n : r^{n(d-\alpha(q)+\varepsilon)} > Z_n \ge r^{n(d-\alpha(q)-\varepsilon)}] = 1$$

$\alpha_{-\infty}$, α_{∞} を

$$\begin{aligned} \alpha_{-\infty} &= \limsup_{n\to\infty} \operatorname*{ess.sup}_{Z_n>0}\left(d - \frac{\log Z_n}{n \log r}\right), \\ \alpha_{\infty} &= \liminf_{n\to\infty} \operatorname*{ess.inf}_{Z_n>0}\left(d - \frac{\log Z_n}{n \log r}\right) \ge 0 \end{aligned}$$

で定義すると $[\alpha_{\infty}, \alpha_{-\infty}]$ の外で $f = -\infty$ だから, f の存在は $[\alpha_{\infty}, \alpha_{-\infty}]$ だけで考えればよい.

2.3 i.i.d. の積から生成される Martingale について

$X \geq 0$ を F_1- 可測で $\mathrm{E}[X] = 1$ なる r.v. とすると X は次のように表せる:

$$X = r^d p(j_1, \cdots, j_d) \quad \text{on} \quad I_{1,j_1,\cdots,j_d} \quad (j_1, \cdots, j_d = 0, \cdots, r-1)$$

ここで $p(j_1, \cdots, j_d) \geq 0 \ (j_1, \cdots, j_d = 0, \cdots, r-1)$ で

$$\sum_{j_1,\cdots,j_d} p(j_1, \cdots, j_d) = 1$$

を満たす. $X_n \ (n \geq 1)$ を F_n- 可測, X_1 と同分布で F_{n-1} とは独立な r.v. とし, P に関する martingale を

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1, \\ Z_n &= \prod_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

で定義する. このとき

$$\begin{aligned} D_{\min} &= \min_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} \log \frac{1}{p(j_1, \cdots, j_d)} / \log r \ (\geq 0), \\ D_{\max} &= \max_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} \log \frac{1}{p(j_1, \cdots, j_d)} / \log r \ (\geq 0) \end{aligned}$$

とおくと

定理 2.3
1) $D_{\min} < D_{\max}$ のとき (即ち, $p(j_1, \cdots, j_d)$ が同じでないとき).
このとき

$$\begin{aligned} \tau(q) &= d(1-q) + \frac{\log \mathrm{E}[X^q : X > 0]}{\log r} \\ &= \frac{\log \sum_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} p(j_1, \cdots, j_d)^q}{\log r}, \end{aligned}$$

$$f(\alpha(q)) = \tau(q) + q\alpha(q), \quad -\infty < q < \infty$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= -\frac{d}{dq}\tau(q) \\ &= -\frac{\sum_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} p(j_1, \cdots, j_d)^q \log p(j_1, \cdots, j_d)}{\sum_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} p(j_1, \cdots, j_d)^q \cdot \log r} \end{aligned}$$

で $\alpha : (-\infty, \infty) \longrightarrow (D_{\min}, D_{\max})$ は decreasing で onto ある.

$$f(\alpha) = -\infty, \quad \alpha \notin [D_{\min}, D_{\max}]$$

$$\tau(q) = \sup_{D_{\min} < \alpha < D_{\max}} (f(\alpha) - q\alpha)$$

f は

$$\alpha(0) = -\frac{\sum_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} \log p(j_1, \cdots, j_d)}{\sum_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} 1 \cdot \log r}$$

で最大値

$$f(\alpha(0)) = \frac{\log \sum_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} 1}{\log r} \; (= \dim_B \mathrm{supp}(\mu))$$

を取る. また

$$\begin{aligned} f(D_{\min}) &= \frac{\log \sum_{p(j_1,\cdots,j_d)=r^{-D_{\min}}} 1}{\log r}, \\ f(D_{\max}) &= \frac{\log \sum_{p(j_1,\cdots,j_d)=r^{-D_{\max}}} 1}{\log r} \end{aligned}$$

で

$$f(\alpha(1)) = -\frac{\sum_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} p(j_1, \cdots, j_d) \log p(j_1, \cdots, j_d)}{\log r} = \dim_I \mu$$

は f の唯一の fixed point である.
2) $D_{\min} = D_{\max}$ のとき (即ち, $p(j_1, \cdots, j_d)$ がすべて同じとき).
このとき $D_{\min} = \min_{p(j_1,\cdots,j_d)>0} 1/\log r$ で

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \begin{cases} D_{\min} & \alpha = D_{\min}, \\ -\infty & \alpha \neq D_{\min}, \end{cases} \\ \tau(q) &= (1-q)D_{\min}, \quad -\infty < q < \infty \end{aligned}$$

となる.

この場合も前節の例のときと同様に f の存在を示すことがキーポイントとなり, ここでも Chernoff の定理が用いられる.

2.4 同じ $f(\alpha)$ をもつ p.m. について

$[0,1]^d$ 上で定義された p.m. が $f(\alpha)$ によりどの程度特徴付けられるのか, 特別な場合に考えてみる.

$i=1,2$ に対して $d^{(i)}(\geq 1)$ および $r^{(i)}(\geq 2)$ を正の整数とする. このとき $I^{(i)}=[0,1]^{d^{(i)}}$ 上に確率ベクトル $p^{(i)}(j_1,\cdots,j_{d^{(i)}})$ $(j_1,\cdots,j_{d^{(i)}}=1,2,\cdots,r_i)$ から 2.3節のようにして作られる p.m. を $\mu^{(i)}$ とし, 対応する multifractal spectrum を $f^{(i)}$ とする. さらに $p^{(i)}(j_1,\cdots,j_{d^{(i)}})$ のうち 0 でないものを $p_j^{(i)}$ $(j=1,2,\cdots,r_{N_i})$ とする. このとき, 次の結果が得られる.

定理 2.4 $p_j^{(i)}$ $(j=1,2,\cdots,r_{N_i})$ が定数でないとする. $f^{(1)}=f^{(2)}$ ならば, 整数 r (≥ 2), $m^{(i)}$ (≥ 1) $(i=1,2)$, および各要素が 0 でない確率ベクトル p_j, $(j=1,2,\cdots,r^{d_B})$ が一意に存在して $r^{(i)}$ $(i=1,2)$ は

$$r^{(i)}=r^{m_i},\quad (m_1,m_2)=1$$

と表され, $p_j^{(i)}$ $(j=1,2,\cdots,r_{N_i})$ と $p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_{m_i}}$ $(j_1,j_2,\cdots,j_{m_i}=1,2,\cdots,r^{d_B})$ が一致する. ここで $d_B=f^{(i)}(\alpha(0))$ は 2 つの p.m. の support の box-counting 次元である.

この結果の証明には複素関数論を使う. 逆の成り立つことは $f^{(i)}$ の定義からすぐにわかる. また $p_j^{(i)}$ $(j=1,2,\cdots,r_{N_i})$ が定数のときは, support の box-counting 次元が同じことを意味するだけである.

2.5 補足

今まで考えてきたような multifractal spectrum では負の値として $-\infty$ 以外取らないことはすでに述べた. 最近 Mandelbrot (例えば [4]) はランダムな multifractal の研究において負の multifractal spectrum というものを導入している. ここで multifractal がランダムとは, p.m. μ が 1 つに固定されているのではなく, ある確率空間 (Ω,Q) を動くパラメーター ω をもっていることを意味する. もちろん, このような場合でもサンプル ω ごとの multifractal spectrum を考える限り, $-\infty$ 以外に負の値を取ることはあり得ない. しかし multifractal spectrum を

$$f(\alpha)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{\log E_Q[N_\delta(\omega,\alpha+\varepsilon)-N_\delta(\omega,\alpha-\varepsilon)]}{-\log\delta}$$

と定義すると, ある α に対しては $-\infty$ と正の値が平均されて有限な負の値を取るというのが Mandelbrot の考えのようである.

参考文献

[1] P. Billingsley, *Probability and Measure*. John Wiley, 1979.

[2] K. J. Falconer, *Fractal Geometry*. John Wiley, 1990.

[3] J. Feder, *Fractals*. Plenum Press, 1988.

[4] B. B. Mandelbrot, A class of multinomial multifractal measures with negative (latent) values for the "dimension" $f(\alpha)$. *Fractals' Physical Origin and Properties* (L. Pietronero ed.), Plenum Press, 1989.